

MATEMÁTICA

1. Calcule o número natural n que torna o determinante abaixo igual a 5.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ \log_2(n-1) & \log_2(n+1) & \log_2(n-1) & \log_2(n-1) \end{vmatrix}$$

RESOLUÇÃO:

Pelo Teorema de Jacobi, adicionando as três primeiras colunas à quarta coluna, temos:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ \log_2(n-1) & \log_2(n+1) & \log_2(n-1) & \log_2(n-1) \end{vmatrix} = 5 \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \log_2(n-1) & \log_2(n+1) & \log_2(n-1) & 3\log_2(n-1) + \log_2(n+1) \end{vmatrix} = 5 \Rightarrow$$

Desenvolvendo por Laplace a quarta coluna, vem:

$$3\log_2(n-1) + \log_2(n+1) = 5 \Rightarrow \log_2[(n-1)^3 \cdot (n+1)] = 5 \Rightarrow (n-1)^3 \cdot (n+1) = 32$$

Por inspeção, $n = 3$ é raiz.

Assim:

$$(n-1)^3 \cdot (n+1) = 32 \Rightarrow (n-3)(n^3 + n^2 + 3n + 11) = 0$$

Por outro lado, $n^3 + n^2 + 3n + 11 = 0$ não apresenta raízes racionais, logo 3 é a única raiz natural.

2. Considere o polinômio $P(x) = x^3 + ax + b$ de coeficientes reais, com $b \neq 0$. Sabendo que suas raízes são reais, demonstre que $a < 0$.

RESOLUÇÃO:

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ uma das raízes de $P(x) = 0$; então $P(\alpha) = 0$.

Retirando a raiz α da equação, temos:

$$\begin{array}{c|cccc} \alpha & 1 & 0 & a & b \\ \hline & 1 & \alpha & \alpha^2 + a & \alpha^3 + a\alpha + b \end{array}$$

A equação $x^2 + \alpha x + (\alpha^2 + a) = 0$ possui as outras duas raízes reais.

$$\text{Assim } \Delta = \alpha^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\alpha^2 + a) \geq 0 \Rightarrow \Delta = \alpha^2 - 4\alpha^2 - 4a \geq 0$$

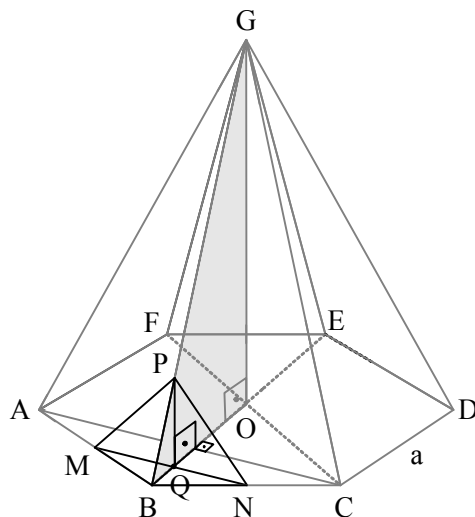
$$\Delta = -3\alpha^2 - 4a \geq 0 \therefore 3\alpha^2 + 4a \leq 0. \text{ Como } \alpha \in \mathbb{R}^* \text{ (pois } b \neq 0)$$

temos que $a < 0$ (cqdd)

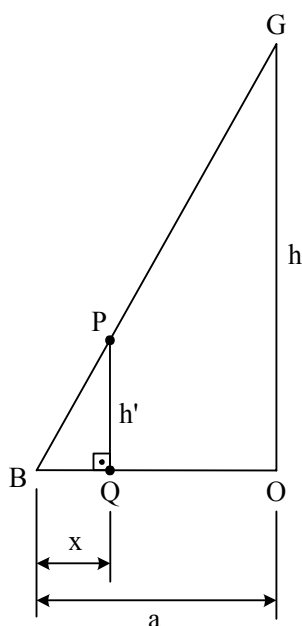
3. Considere uma pirâmide regular de altura h , cuja base é um hexágono $ABCDEF$ de lado a . Um plano perpendicular à base e contendo os pontos médios das arestas AB e BC divide a pirâmide em dois poliedros. Calcule a razão entre os volumes destes dois poliedros.

RESOLUÇÃO:

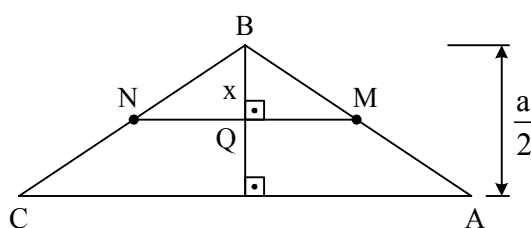
Considere a pirâmide hexagonal e a pirâmide de base triangular PMBN:



$\triangle BOG$



$\triangle ABC$



$\triangle PBQ \sim \triangle GBO$

$$\frac{h'}{h} = \frac{x}{a} \Rightarrow \frac{h'}{h} = \frac{\frac{a}{4}}{a} \\ \frac{h'}{h} = \frac{1}{4}$$

Como $\overline{MN}$ é base média do $\triangle ABC$,

$$BQ = x = \frac{a}{4}.$$

O $\triangle ABC$ tem área igual à de um triângulo equilátero componente do hexágono $ABCDEF$.

Como $\triangle MBN \sim \triangle ABC$ na razão 1:2, temos que a área do $\triangle MBN$ é $1/4$ da área do triângulo equilátero.

A área do hexágono $ABCDEF$ são 6 áreas de triângulo equilátero ($6S$). A pirâmide $MBNP$ possui área da base $\frac{1}{4}$ do triângulo equilátero $\left(\frac{S}{4}\right)$.

Seja V o volume da pirâmide hexagonal e V' o volume da pirâmide triangular.

$$\text{Assim, } \frac{V}{V'} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 6S \cdot h}{\frac{1}{3} \cdot \frac{S}{4} \cdot h'} \Rightarrow \frac{V}{V'} = 24 \cdot \left(\frac{h}{h'}\right) = 24 \cdot 4 = 96$$

$$\frac{V}{V'} = 96 \Rightarrow \frac{V - V'}{V'} = \frac{96 - 1}{1} \Rightarrow \frac{V - V'}{V'} = 95$$

A razão entre os volumes dos poliedros maior e menor é 95.

4. Calcule $\sin(x + y)$ em função de a e b , sabendo que o produto $ab \neq 0$, que $\sin x + \sin y = a$ e que $\cos x + \cos y = b$.

RESOLUÇÃO:

Dado que $\begin{cases} \sin x + \sin y = a & (1) \\ \cos x + \cos y = b & (2) \end{cases}$

$$(1)^2 + (2)^2: \underbrace{\sin^2 x + \sin^2 y + 2\sin x \cdot \sin y + \cos^2 x + \cos^2 y + 2\cos x \cdot \cos y}_{=1} = a^2 + b^2$$

$$2 + 2(\cos x \cdot \cos y + \sin y \cdot \sin x) = a^2 + b^2$$

$$2 + 2\cos(x - y) = a^2 + b^2$$

$$\cos(x - y) = \frac{a^2 + b^2}{2} - 1$$

(1) x (2): $\sin x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x + \sin y \cdot \cos y = a \cdot b$

$$\sin(x + y) + \frac{1}{2}(\sin 2x + \sin 2y) = ab$$

$$\sin(x + y) + \frac{1}{2} \cancel{2} \sin(x + y) \cdot \cos(x - y) = ab$$

$$\sin(x + y) \cdot [1 + \cos(x - y)] = ab$$

$$\sin(x + y) \cdot \left[\cancel{1} + \frac{a^2 + b^2}{2} - \cancel{1} \right] = ab$$

$$\boxed{\sin(x + y) = \frac{2ab}{a^2 + b^2}}$$

5. Seja uma função $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, onde $\mathbb{R}$ representa o conjunto dos números reais, tal que $f(a/b) = f(a) - f(b)$ para a e b pertencentes ao domínio de f . Demonstre que f é uma função par.

RESOLUÇÃO:

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) - f(b)$$

Se $b = -a$ temos:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a}{-a}\right) &= f(a) - f(-a) = f(-1) \\ f\left(\frac{a}{-a}\right) &= f\left(\frac{-a}{a}\right) = \frac{f(-a) - f(a)}{0} = \frac{f(-1)}{0} = 2f(-1) \end{aligned} \quad \downarrow \oplus$$

$$\boxed{f(-1) = 0}$$

Se $b = -1$ temos: $f\left(\frac{a}{-1}\right) = f(a) - \cancel{f(-1)}^0 = f(-a)$

$$\boxed{f(a) = f(-a), \forall a \in \mathbb{R}^*}$$

logo $f(x)$ é par

6. Sendo a , b e c números naturais em progressão aritmética e z um número complexo de módulo unitário, determine um valor para cada um dos números a , b , c e z de forma que eles satisfaçam a igualdade:

$$\frac{1}{z^a} + \frac{1}{z^b} + \frac{1}{z^c} = z^9$$

RESOLUÇÃO:

Colocando z na forma trigonométrica, temos: $z = |z| \cdot \text{cis}\theta$. Como $|z| = 1$, $z = \text{cis}\theta$. Substituindo na equação, temos:

$$\frac{1}{z^a} + \frac{1}{z^b} + \frac{1}{z^c} = z^9 \therefore z^{-a} + z^{-b} + z^{-c} = z^9 \therefore \text{cis}(-a\theta) + \text{cis}(-b\theta) + \text{cis}(-c\theta) = \text{cis}(9\theta)$$

$$\text{cis}(-b\theta) \cdot [\text{cis}(b\theta - a\theta) + 1 + \text{cis}(b\theta - c\theta)] = \text{cis}9\theta \therefore$$

$$\text{cis}[\theta(b-a)] + 1 + \text{cis}[\theta(b-c)] = \frac{\text{cis}9\theta}{\text{cis}(-b\theta)}.$$

Como $(a, b \text{ e } c)$ formam uma PA, temos que $b - a = c - b = R$

$$\text{cis}(\theta R) + 1 + \text{cis}(-\theta R) = \text{cis}(9\theta + b\theta) \therefore \cos(\theta R) + i\sin(\theta R) + 1 + \cos(\theta R) - i\sin\theta R = \text{cis}[\theta(9+b)]$$

$$1 + 2\cos(\theta R) = \cos[\theta(9+b)] + i\sin[\theta(9+b)] \Rightarrow \cos[(9+b)\theta] = 1 + 2\cos(\theta R) \text{ e } \sin[(9+b)\theta] = 0.$$

Temos que $(9+b)\theta = k\pi \therefore b = -9 + \frac{k\pi}{\theta}$ e $\pm 1 = 1 + 2\cos(\theta R)$; $k \in \mathbb{Z}$.

Vamos obter uma solução particular fazendo $k = 2$ e $\theta = \frac{\pi}{10}$, o que dá $b = -9 + 2 \cdot 10 = 11$.

Fazendo $1 = 1 + 2\cos(\theta R) \therefore \cos(\theta R) = 0 \therefore \theta R = \frac{\pi}{2} + k_1\pi$; $k_1 \in \mathbb{Z}$.

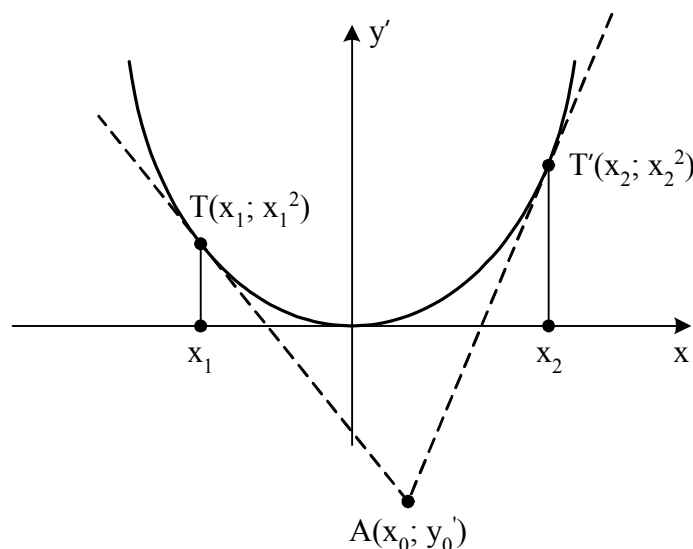
Particularizando para $k_1 = 0$, temos que $\frac{\pi}{10} \cdot R = \frac{\pi}{2} \therefore R = 5$

Assim, $a = 6$; $b = 11$; $c = 16$ e $z = \text{cis}\frac{\pi}{10}$ é uma solução possível.

7. Considere a parábola P de equação $y = ax^2$, com $a > 0$ e um ponto A de coordenadas (x_0, y_0) satisfazendo a $y_0 < ax_0^2$. Seja S a área do triângulo ATT', onde T e T' são os pontos de contato das tangentes a P passando por A.
- Calcule o valor da área S em função de a , x_0 e y_0 .
 - Calcule a equação do lugar geométrico do ponto A, admitindo que a área S seja constante.
 - Identifique a cônica representada pela equação obtida no item anterior.

RESOLUÇÃO:

Fazendo $y' = \frac{y}{a}$, a equação da parábola fica $y' = x^2$.



$$\begin{aligned} \text{Temos: Eq. reta } \overline{AT} & \begin{cases} m_{AT} = 2x_1, \text{ pois } \frac{d}{dx}(x^2) = 2x \\ y' - x_1^2 = 2x_1(x - x_1) \end{cases} \\ \text{Eq. reta } \overline{AT'} & \begin{cases} m_{AT'} = 2x_2 \\ y' - x_2^2 = 2x_2(x - x_2) \end{cases} \end{aligned}$$

Vamos descobrir A em função de x_1 e x_2 :

$$x_1^2 + 2x_1(x_0 - x_1) = x_2^2 + 2x_2(x_0 - x_2) \Leftrightarrow x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} \Rightarrow y'_0 = x_1x_2$$

Portanto, a área do triângulo ATT' é:

$$S' = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & 1 \\ x_2 & x_2^2 & 1 \\ \frac{x_1 + x_2}{2} & x_1x_2 & 1 \end{vmatrix}$$

Calculando o determinante, temos:

$$S' = \frac{1}{4}(x_2 - x_1)^3, \text{ pois } x_2 > x_1.$$

$$\text{Assim, } 4S' = (x_2 - x_1)^3 \Rightarrow x_2 - x_1 = \sqrt[3]{4S'} \Rightarrow x_2 = x_1 + \sqrt[3]{4S'}$$

$$\text{Logo, } x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{x_1 + x_1 + \sqrt[3]{4S'}}{2} = x_1 + \frac{\sqrt[3]{4S'}}{2} \text{ e}$$

$$y'_0 = x_1 x_2 = x_1 \left(x_1 + \sqrt[3]{4S'} \right) = \left(x_0 - \frac{\sqrt[3]{4S'}}{2} \right) \left(x_0 + \frac{\sqrt[3]{4S'}}{2} \right) = x_0^2 - \frac{\sqrt[3]{16S'^2}}{4} = x_0^2 - \frac{\sqrt[3]{2S'^2}}{2}$$

$$\text{Como } y'_0 = \frac{y_0}{a}, \text{ então } y_0 = a y'_0 = a \left(x_0^2 - \frac{\sqrt[3]{2S'^2}}{2} \right).$$

$$\text{Como } S' = \frac{S}{a}, \text{ então } y_0 = a \left(x_0^2 - \frac{\sqrt[3]{\frac{2S^2}{a^2}}}{2} \right) \Rightarrow y_0 = a x_0^2 - \frac{\sqrt[3]{2aS^2}}{2}$$

$$\text{Temos } S = a S' = a \frac{(x_2 - x_1)^3}{4}$$

$$\text{Mas } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2x_0 \\ x_1 x_2 = y'_0 = \frac{y_0}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 + x_2)^2 = 4x_0^2 \\ 4x_1 x_2 = \frac{4y_0}{a} \end{cases}$$

Subtraindo as equações, temos:

$$(x_2 - x_1)^2 = 4x_0^2 - \frac{4y_0}{a} \Rightarrow x_2 - x_1 = 2\sqrt{x_0^2 - \frac{y_0}{a}}$$

$$\text{Logo } S = 2a \left(\sqrt{x_0^2 - \frac{y_0}{a}} \right)^3$$

b) Como já foi calculado, a equação da cônica é:

$$y_0 = a \left(x_0^2 - \frac{\sqrt[3]{2S^2/a^2}}{2} \right) \Rightarrow y_0 = a x_0^2 - \frac{\sqrt[3]{2aS^2}}{2}$$

c) Uma parábola transladada em relação à parábola dada.

8. Demonstre que o número $\underbrace{11\dots1}_{(n-1) \text{ vezes}} \underbrace{222\dots2}_{n \text{ vezes}} 5$ é um quadrado perfeito.

RESOLUÇÃO:

Vamos reescrever N da seguinte forma:

$$N = \underbrace{111\dots11}_{2n \text{ algarismos}} + \underbrace{111\dots11}_{n+1 \text{ algarismos}} + 3$$

Seja $n_1 = \underbrace{111\dots11}_{2n \text{ algarismos}}$. Assim, n_1 é a soma de uma PG de $2n$ termos, com $a_1 = 1$ e razão $q = 10$.

$$\text{Logo, } n_1 = \frac{a_1 q^{2n} - a_1}{q - 1} = \frac{10^{2n} - 1}{9}.$$

$$\text{Da mesma forma, seja } n_2 = \underbrace{111\dots11}_{n+1 \text{ algarismos}}. \text{ Assim, } n_2 = \frac{10^{n+1} - 1}{9}.$$

$$\text{Portanto, } N = \frac{10^{2n} - 1}{9} + \frac{10^{n+1} - 1}{9} + 3 = \frac{10^{2n} + 10^{n+1} + 25}{9} = \frac{(10^n)^2 + 2 \cdot 5 \cdot (10^n) + 5^2}{3^2} = \left(\frac{10^n + 5}{3} \right)^2.$$

Logo, N é um quadrado perfeito.

- 9.** Ao final de um campeonato de futebol, somaram-se as pontuações das equipes, obtendo-se um total de 35 pontos. Cada equipe jogou com todos os outros adversários apenas uma vez. Determine quantos empates houve no campeonato, sabendo que cada vitória valia 3 pontos, cada empate valia 1 ponto e que derrotas não pontuavam.

RESOLUÇÃO:

Num campeonato com n times há $C_{n,2}$ jogos.

$$\frac{n(n-1)}{2} \text{ jogos } \begin{cases} a \text{ vitórias (3a pontos no total)} \\ b \text{ empates (2b pontos no total)} \end{cases} \Rightarrow a + b = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\text{Pontos: } 3a + 2b = 35$$

$$a + 2a + 2b = 35$$

$$a + 2(a + b) = 35$$

$$a + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = 35$$

$$a + n(n-1) = 35 \Rightarrow 35 - a = n(n-1)$$

Como a é o número de vitórias e o total de pontos foi 35, no máximo teríamos 11 vitórias (33 pontos).

$$\text{Logo: } 0 \leq a \leq 11 \quad \times (-1)$$

$$0 \geq -a \geq -11 \quad + (35)$$

$$35 \geq 35 - a \geq 24$$

$$35 \geq n(n-1) \geq 24$$

$$\text{Então, podemos afirmar que: } \begin{aligned} 42 &> n(n-1) > 20 \\ 7 \times 6 &> n(n-1) > 5 \times 4 \end{aligned}$$

Como $n(n-1)$ é o produto de dois números inteiros consecutivos, temos $n(n-1) = 6 \times 5$.

$$\text{Portanto } n = 6: \quad 35 - a = n(n-1) \Rightarrow a = 5$$

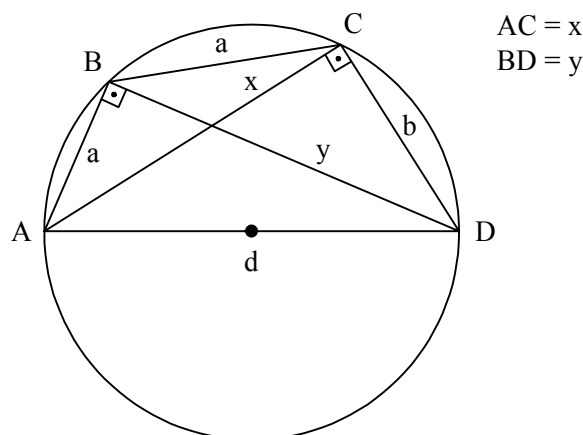
$$a + b = \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow 5 + b = \frac{6 \cdot (6-1)}{2} \Rightarrow b = 10$$

Houve 10 empates.

- 10.** Um quadrilátero convexo $ABCD$ está inscrito em um círculo de diâmetro d . Sabe-se que $\overline{AB} = \overline{BC} = a$, $\overline{AD} = d$ e $\overline{CD} = b$, com a , b e d diferentes de zero.
- Demonstre que $d^2 = bd + 2a^2$.
 - Se a , b e d são números inteiros e a é diferente de b , mostre que d não pode ser primo.

RESOLUÇÃO:

- a) Considere o círculo com o quadrilátero inscrito, tal que $\overline{AD}$ é diâmetro e os triângulos ACD e ABD são retângulos.



Pelo teorema de Ptolomeu, temos: $ad + ab = xy$ e $a^2 + y^2 = d^2$ e $x^2 + b^2 = d^2$
 $y^2 = d^2 - a^2$ e $x^2 = d^2 - b^2 \Rightarrow (xy)^2 = (d^2 - a^2)(d^2 - b^2) \therefore (ad + ab)^2 = (d^2 - a^2)(d^2 - b^2)$
 $a^2 \cdot (d + b)^2 = (d^2 - a^2)(d - b)(d + b) \therefore a^2 d + \cancel{a^2 b} = d^3 - d^2 b - a^2 d + \cancel{a^2 b} \therefore 2a^2 d = d^3 - d^2 b$
 $\therefore 2a^2 d + d^2 b = d^3 \therefore d^2 = 2a^2 + db$ (cqdd)

b) $d^2 = 2a^2 + db \therefore d^2 - 2a^2 = db \therefore d - \frac{2a^2}{d} = b$

Como $b, d \in \mathbb{Z}$ e considerando d primo, temos que d é divisor de $2a^2$ (simbolicamente $d \mid 2a^2$).

Como d é diâmetro e a uma corda, temos que $d > a \Rightarrow d$ não é divisor de a^2 , logo d é divisor de 2, ou seja, $d = 2$ ou $d = 1$.

Para $d = 1$, temos $(1)^2 = 2a^2 + b \therefore 2a^2 + b = 1$ (absurdo)

Para $d = 2$, temos $4 = 2a^2 + 2b \therefore a^2 + b = 1 \Rightarrow a = b = 1$ (absurdo pois $a \neq b$)

Logo d não é primo.

Comentários

Prova bem elaborada, com questões de grau de dificuldade elevado, mesmo para aqueles alunos mais bem preparados.

Ressaltamos o elevado grau de exigência da questão de número 7, ligada ao assunto geometria analítica.

Notamos a ausência dos clássicos problemas de análise combinatória, sempre presentes nos últimos Exames do IME.

Professores responsáveis:

*Celso Faria de Souza
Daniel Demétrio
Emerson de Maria
Fernando Duarte
Henrique Ferreira
Humberto Naves
Umberto César Chacon Malanga*

Coordenação:

*Alex Sander Schroeder de Barros
André Oliveira de Guadalupe
Nicolau Arbex Sarkis*

Digitação e diagramação:

*Anderson Flávio Correia
Antonio José Domingues da Silva
Kleber de Souza Portela*